与爱因斯坦宇宙学常数相关的狭义相对论

————评介德西特不变和反德西特不变狭义相对论

闫沐霖[1]

中国科学技术大学，近代物理系，交叉学科理论中心

安徽，合肥，230026

摘要

通常的狭义相对论是在庞加莱变换下不变的，它的基本度规为闵科夫斯基时空度规，该度规满足没有宇宙学常数Λ的真空爱因斯坦方程。本文指出：$\Lambda \neq 0$ 时的狭义相对论是德西特/反德西特不变狭义相对论。求解$\Lambda \neq 0$的真空爱因斯坦方程，得到这种拓展的狭义相对论的基本度规是陆启铿-邹振隆-郭汉英1974年提出的Beltrami 度规；用欧拉-拉格朗日方程证明Beltrami时空的自由粒子运动是惯性运动。本文求出了德西特/反德西特不变狭义相对论的全部凯林(Killing) 矢量，证明了Beltrami 时空是最大对称性空间。导出来全部守恒量。构造了理论的正则形式，发现了正、负正则能量的色散关系的不对称性；实现了正则量子化，导出了相对论性波方程，从而建立了德西特/反德西特不变的相对论量子力学。简要介绍了通过天文观测原子（或离子）能级劈裂来探测精细结构常数α改变的实验。实验结果在$4 \sim 5\sigma$ 置信度内否定了庞加莱不变狭义相对论的预言，发现在$z \approx \{1 \sim 3\}$处$\alpha_z \neq \alpha_0$。由于原子或离子能级的精细结构是相对论量子力学的结果，所以观测实验支持在红移$z \geq 1$的狭义相对论量子力学中的Λ修正不可忽略。这是对德西特/反德西特不变狭义相对论的实验支持。是超出现有物理学标准模型的新物理。

关键词：爱因斯坦宇宙学常数，德西特不变和反德西特不变狭义相对论，相对论量子力学，光谱的精细结构，精细结构常数的改变

I. 引言

狭义相对论是近代物理学的基石，对狭义相对论拓展的研究有关物理学的基础。近年来对德西特不变和反德西特不变狭义相对论的研究再次受到关注[1–4] 本文旨在评介和研究这个理论。

我国学者曾于上世纪70年代前后对狭义相对论的基础作过有价值的探讨[2,3] [5, 6]，导致

[1] e-mail: mlyan@ustc.edu.cn
[2] 华罗庚，“*与吴咏时、闫沐霖唔谈*”，(1969) (未发表）.
[3] 陆启铿，“*为什么一定要用闵科夫斯基空间度规?*”，(1970) (未发表）.

了德西特(de Sitter) 不变和反德西特(Anti-de Sitter) 不变狭义相对论的发现[5]。通常的爱因斯坦狭义相对论的时空对称性是庞加莱(Poincaré)不变的，德西特不变和反德西特不变狭义相对论是前者的拓展。这种拓展使得狭义相对论理论完整化了。在工作[5]中引进了新的普适性曲率常数λ，使用了数学中典型域的理论方法[7]，因此当时称这种时空为典型时空，这种狭义相对论被称为典型时空狭义相对论，现在称之为德西特/反德西特-不变狭义相对论。在这一开创性的物理工作[5]之后，对完整的狭义相对论理论的理解深化为：

$$\text{狭义相对论} = \begin{cases} \text{德西特不变狭义相对论} & \lambda > 0, \\ \text{庞加莱不变狭义相对论} \quad (\text{即通常的爱因斯坦狭义相对论}) & \lambda = 0, \\ \text{反德西特不变狭义相对论} & \lambda < 0. \end{cases} \tag{1}$$

本文的研究展示了普适性曲率常数λ的物理意义：指出$\lambda = \Lambda/3$，其中Λ是物理中的爱因斯坦宇宙学常数。这样，德西特/反德西特-不变狭义相对论是爱因斯坦宇宙学常数$\Lambda \equiv 3\lambda \neq 0$ 的时空中的狭义相对论。上个世纪末，人们发现了宇宙加速膨胀[8, 9]。这是近几十年来最重要的天文与宇宙学观测实验成就之一。宇宙加速膨胀意味着时空中存在一个等效宇宙学常数$\Lambda_{\rm eff} \equiv \Lambda + 8\pi G\rho_{\rm dark\ energy} \neq 0$，其中$\Lambda$是普适的爱因斯坦宇宙学常数；$G$ 是牛顿引力常数；$\rho_{\rm dark\ energy}$ 是暗能量密度[10, 11]。我们强调，一般地有，普适常数$\Lambda \neq 0$，$\rho_{\rm dark\ energy} \neq 0$ [12]。在爱因斯坦宇宙学常数$\Lambda \neq 0$ 的时空中的狭义相对论就是德西特/反德西特-不变狭义相对论。这些发展使得对它们的研究成为有价值的物理学前沿研究方向。近十多年来，我国学者在这一方向上作了很多工作：参考文献[1, 2, 12–23] 是对这方面的部分工作的不完整列举。

在本文中，作者认同如下的认识：狭义相对论的基本精神是“真空几何决定物理”。不同于广义相对论，在狭义相对论理论框架内不存在从物质运动的能量-动量推导时空几何度规的问题，狭义相对论的基本度规$g_{\mu\nu}$来自理论的如下基本要求：

(1) $g_{\mu\nu}$是爱因斯坦方程的真空解；

(2) 在以$g_{\mu\nu}$为度规的真空中自由粒子作匀速直线运动，即惯性定律成立；

(3) $g_{\mu\nu}$是具有最大对称性的度规。

通常的庞加莱不变狭义相对论还要有一个额外假设：即爱因斯坦方程中的普适常数$\Lambda = 0$，就是说爱因斯坦宇宙学常数为零。由此就定出通常爱因斯坦狭义相对论的基础度规是$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = {\rm diag}\{1, -1, -1, -1\}$。本文去掉这个额外假设，考虑$\Lambda \neq 0$情况。在这种一般的情况下，讨论上述确定狭义相对论度规的基本原理有没有解，就是一个非平庸的问题。本文将就此进行分析，我们从这个角度审视文献[5]的结果，求出德西特/反德西特-不变的狭义相对论的基础度规，并给出相应的所有凯林(Killing) 矢量，以及推导出德西特/反德西特-不变的狭义相对论力学的守恒量与守恒定律。

爱因斯坦的庞加莱不变狭义相对论和德西特/反德西特-不变狭义相对论是平权的。哪一理论是物理的，这要由实验来决定取舍。尽管大量的实验已经相当高的精度内肯定了爱因斯坦的庞加莱不变狭义相对论[24]，但从宇宙学观点看来，那些实验仍是近似局域性的，比如地球实验室实验，“银河系”范围内的实验等，都近似是宇宙大尺度结构中的一个点附近的邻域实验。对于狭义相对论，宇宙学大范围观测实验验证结论仍是未完全确定的。值得特别指出的是：原子光谱中的精细结构常数 α 不随时间-空间演化是爱因斯坦的庞加莱不变狭义相对论的预言，但是近十多年来对400多个高红移类星体吸收光谱的观测违背这一预言，发现α随时空变化，实验文献已声称其χ^2达到$\sim 4.2\sigma$ [25–27]。看来这对于通常爱因斯坦的庞加莱不变狭义相对论的正确性是一明确挑战。

本文的内容组织如下：第2节具体讨论狭义相对论的基础时间-空间度规。通过求解爱因斯坦方程的真空解，指出狭义相对论最一般的基础度规为Beltrami度规，并导出其中的曲率参数λ与真空爱因斯坦方程中的普适常数Λ的关系；求出与之相对应的拉格朗日函数，并证明惯性运动定律成立；求解凯林(Killing) 矢量方程，证明Beltrami 度规空间为最大对称性空间。第3 节讨论Noether 定理和守恒荷。求出十个守恒荷：$\{E,\ \mathbf{p},\ \mathbf{K},\ \mathbf{L}\}$。第4节评介德西特/反德西特-不变的狭义相对论量子力学。从理论的拉氏形式出发，建立起理论的正则形式，指出正则形式中的正、负能态色散关系的不对称性。在泊松括号的基础上建立海森堡算符代数，求解之，得到正则能量和正则动量的算符表达式，建立德西特/反德西特-不变狭义相对论量子力学的波方程；求出Noether守恒量的表达式，建立德西特/反德西特算符代数。第4节讨论德西特/反德西特-不变狭义相对论的可能实验证据。在该节我们指出：通常的庞加莱不变的狭义相对论预言相对论量子力学中的精细结构常数α在时间空间移动变换下不变。然而对宇宙间遥远天体原子光谱的观测表明α是随宇宙时间和空间方向而改变的，从而否定了通常的庞加莱不变的狭义相对论预言。这是德西特/反德西特-不变狭义相对论的可能实验证据。最后我们简要总结和讨论了本文的结果。本文尝试叙述理论的主要线索，没有试图涵盖德西特/反德西特不变狭义相对论的所有内容。

II. 狭义相对论的基础时间-空间度规

狭义相对论是存在固定度规$g_{\mu\nu}$的时空中的相对论理论，理论中的空间坐标和时间坐标（即坐标时）分别标记由物理的“尺”和“钟”测量得到的空间位置和演化的物理时间，在运动学和动力学中它们相对于原点坐标有绝对的测量意义。我们称这种固定度规为狭义相对论的基础时空度规，或基础度规。下面我们阐述如何确定狭义相对论的基础度

规$g_{\mu\nu}$。在引言中我们说明了确定$g_{\mu\nu}$的原则。在4维时空中的具体实现如下：

1. 要求$g_{\mu\nu}$满足真空爱因斯坦方程：

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \tag{2}$$

式中的$\mathcal{R}_{\mu\nu}$和$\mathcal{R}$是4维时空黎曼几何的瑞琦(Ricci)张量和曲率标量。容易从上式得到：$\mathcal{R} = 4\Lambda = \text{constant}$，这表明方程(2)的解$g_{\mu\nu}$必具有最大对称性（见文献[28]的chapter 13）。直接计算证明下面的度规：

$$g_{\mu\nu}(x) = B_{\mu\nu}(x) \equiv \frac{\eta_{\mu\nu}}{\sigma(x)} + \frac{\Lambda\eta_{\mu\lambda}x^\lambda\eta_{\nu\rho}x^\rho}{3\sigma(x)^2}, \quad \text{其中} \quad \sigma(x) = 1 - \frac{\Lambda}{3}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu, \tag{3}$$

是方程(2)的解。这正是在[5]中由陆启铿、邹振隆、郭汉英用典型域方法对最大对称性空间进行的非平庸分析而得到的典型时空度规。这个度规在后来的文献中常被称为Beltrami度规$B_{\mu\nu}(x)$ [4]，也就是说典型时空的度规是Beltrami 度规。分析对称空间的一般理论见[28] 的13章。由于能量-动量为零的真空在物理中独特意义，在此我们强调指出了文献[5]使用最大对称性空间典型域分析所得到的度规(3)是真空爱因斯坦方程(2)的解，这样就揭示了文献[5] 给出的典型时空度规$B_{\mu\nu}(x)$所含的几何参数$\lambda \equiv 1/R^2 = \Lambda/3$的物理意义。

2. 惯性定律要求自由粒子在$g_{\mu\nu}$-时空中作匀速直线运动，也就是要求通过最小作用量原理（在此等价于短程线运动方程）

$$\delta S \equiv \delta\left[-mc\int ds\right] = -mc\,\delta\int\sqrt{g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu} = 0 \tag{4}$$

得到

$$\ddot{\mathbf{x}} = 0, \quad \text{or } \mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \text{constant}, \tag{5}$$

式中$S = -mc\int ds$是关于自由粒子的朗道-栗弗希兹(Landau-Lifshitz)作用量[29]，$\ddot{\mathbf{x}}$和$\dot{\mathbf{x}}$分别是粒子的加速度和速度。

证明：

注意作用量$S = \int L dt$ 和$g_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}(x)$ (见方程(3))，我们有

$$L = -mc\frac{ds}{dt} = -mc\frac{\sqrt{B_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu}}{dt} = -mc\sqrt{B_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}. \tag{6}$$

[4] Beltrami坐标是Beltrami在19世纪研究Lobachevski几何时提出的。Beltrami 度规是微分几何中刻画常数曲率时空的度规之一。文献[5]首次用典型域方法得到了这个度规。

将(3)代入(6),得到：

$$L = -mc^2\sqrt{\frac{9(c^2-\dot{\mathbf{x}}^2)+3\Lambda[-\mathbf{x}^2\dot{\mathbf{x}}^2+(\mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}})^2+c^2(\mathbf{x}-\dot{\mathbf{x}}t)^2]}{c^2[3+\Lambda(\mathbf{x}^2-c^2t^2)]^2}}. \tag{7}$$

容易看到，当$\Lambda\to 0$时，

$$L \longrightarrow L_{Eins} = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}}, \tag{8}$$

式中L_{Eins}是通常众所周知的爱因斯坦的庞加莱不变狭义相对论中的自由粒子拉格朗日量[29]。

由方程(4)，给出欧拉-拉格朗日(Euler-Lagrangian)方程：

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} + \left(\dot{\mathbf{x}}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} + \left(\ddot{\mathbf{x}}\cdot\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right)\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}, \tag{9}$$

其中$L=L(t,\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})$, $\partial/\partial\mathbf{x}\equiv\nabla := (\partial/\partial x^1)\mathbf{i}+(\partial/\partial x^2)\mathbf{j}+(\partial/\partial x^3)\mathbf{k}$ 等. 在(9) 中所有的项都可以用L的表达式(7)算出来。基于(7)式的计算可验证下面的等式：

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} + \left(\dot{\mathbf{x}}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}. \tag{10}$$

将(10)代入(9)，我们有

$$\left(\ddot{\mathbf{x}}\cdot\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right)\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = 0. \tag{11}$$

因为下式总是成立的（可直接用(7)来验证)：

$$\|\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\| \equiv \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i\partial \dot{x}^j}\right) \neq 0 \tag{12}$$

所以

$$\ddot{\mathbf{x}} = 0, \qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} = \text{constant}. \tag{13}$$

(5)式得证。

这样我们就证明了在以$g_{\mu\nu}(x)=B_{\mu\nu}(x)$为度规的4维典型时空中，惯性定律是成立的，或者说$B_{\mu\nu}(x)$是惯性参考坐标系度规，或惯性度规。以前我们只知道闵科夫斯基(Minkowski) 空间度规$\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}\{1,-1,-1,-1\}$是惯性参考坐标系度规，现在上述计算证明$B_{\mu\nu}(x)$也是惯性度规，这是拓展爱因斯坦的狭义相对论的必要条件。

3. 要求度规为$g_{\mu\nu}=B_{\mu\nu}$的典型时空具有最大对称性：此项要求在于审视典型时空中的独立凯林(Killing) 矢量的数目是否为$N(N+1)/2=10$ （式中$N=4$是时空的维数）。等价地，对应的对称荷也应是10。下面，我们来求该典型时空中全部独立的凯林矢量，并在下节中求出所有的对称守恒荷。在度规为$g_{\mu\nu}(x)=B_{\mu\nu}(x)$ 的典型时空中，考虑无穷小的坐标变换（或一无穷小时空映射）：

$$x^{\mu}\longrightarrow x^{'\mu}=x^{\mu}+\epsilon\xi^{\mu}(x),\quad (|\epsilon|<<1) \tag{14}$$

式中的$\xi^{\mu}(x)$为该无穷小变换的生成元。若对应度规的李微商为0，

$$\mathcal{L}_{\xi}g_{\mu\nu}=0, \tag{15}$$

$\xi^{\mu}(x)$为凯林(Killing)矢量。凯林(Killing)矢量由下面的方程式确定：

$$\xi_{\mu;\nu}+\xi_{\nu;\mu}=0. \tag{16}$$

在本条目中，我们将求出度规为$g_{\mu\nu}(x)=B_{\mu\nu}(x)$的典型时空中的所有凯林矢量。

由公式(3)，注意到$\xi_{\mu;\nu}=\xi_{\mu,\nu}-\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\xi_{\lambda}$ 以及$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$可由$g_{\mu\nu}=B_{\mu\nu}$算出来，凯林矢量所要满足的方程式(16)的10个分量表达式就可逐一写出如下：

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial x^0}=\frac{2\Lambda x^0}{3\sigma(x)}\xi_0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial x^1}=\frac{-2\Lambda x^1}{3\sigma(x)}\xi_1, \tag{18}$$

$$\frac{\partial\xi_2}{\partial x^2}=\frac{-2\Lambda x^2}{3\sigma(x)}\xi_2, \tag{19}$$

$$\frac{\partial\xi_3}{\partial x^3}=\frac{-2\Lambda x^3}{3\sigma(x)}\xi_3, \tag{20}$$

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial x^1}+\frac{\partial\xi_1}{\partial x^0}=\frac{2\Lambda}{3\sigma(x)}(-\xi_0x^1+\xi_1x^0) \tag{21}$$

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial\xi_2}{\partial x^0}=\frac{2\Lambda}{3\sigma(x)}(-\xi_0x^2+\xi_2x^0) \tag{22}$$

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial x^3}+\frac{\partial\xi_3}{\partial x^0}=\frac{2\Lambda}{3\sigma(x)}(-\xi_0x^3+\xi_3x^0) \tag{23}$$

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial\xi_2}{\partial x^1}=\frac{-2\Lambda}{3\sigma(x)}(\xi_2x^1+\xi_1x^2) \tag{24}$$

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial x^3}+\frac{\partial\xi_3}{\partial x^1}=\frac{-2\Lambda}{3\sigma(x)}(\xi_3x^1+\xi_1x^3) \tag{25}$$

$$\frac{\partial\xi_2}{\partial x^3}+\frac{\partial\xi_3}{\partial x^2}=\frac{-2\Lambda}{3\sigma(x)}(\xi_2x^3+\xi_3x^2), \tag{26}$$

其中$\sigma(x) = 1 - \frac{\Lambda}{3}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$。我们的目标是求解这10个一阶联立偏微分方程：(17)–(26)。为书写方便和记号紧凑我们在4变量时间-空间$\{x^\mu\} \in \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$中定义如下的函数记号：$c(x^1, x^2, x^3) =: c(\not{0})$，$c(x^0, x^2, x^3) =: c(\not{1})$，$c(x^0, x^1, x^3) =: c(\not{2})$，$c(x^0, x^1, x^2) =: c(\not{3})$。一般地$c(\not{\mu})$ 表示多变量函数$c(x)$是与第μ个时空变量x^μ无关的函数。以此类推，$b(\not{\mu}\ , \not{\nu})$是与第$\mu$个和第$\nu$个时空变量无关的函数（记住：$\{\mu,\ \nu\} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$），等等。由偏微分方程(17)，我们有：

$$\frac{d\xi_0}{\xi_0} = \frac{2\Lambda x^0 dx^0}{3(1 - \frac{\Lambda}{3}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu)} = \frac{\Lambda d[(x^0)^2]}{3 - \Lambda((x^0)^2 - \mathbf{x}^2)}$$

对上面等式两边积分，我们得到：

$$\ln \xi_0 = \ln\left[\frac{c(\not{0})}{\sigma(x)}\right], \Rightarrow \xi_0 = \frac{c(\not{0})}{\sigma(x)}.$$

同理，分别由方程(18), (19), (20)可求得：

$$\xi_1 = \frac{c(\not{1})}{\sigma(x)},\ \ \xi_2 = \frac{c(\not{2})}{\sigma(x)},\ \ \xi_3 = \frac{c(\not{3})}{\sigma(x)}$$

所以

$$\xi_\mu = \frac{c(\not{\mu})}{\sigma(x)}. \tag{27}$$

将式(27)代入方程(21)–(26)，我们得到：

$$\frac{\partial c(\not{1})}{\partial x^2} + \frac{\partial c(\not{2})}{\partial x^1} = 0 \tag{28}$$
$$\frac{\partial c(\not{1})}{\partial x^3} + \frac{\partial c(\not{3})}{\partial x^1} = 0 \tag{29}$$
$$\frac{\partial c(\not{1})}{\partial x^0} + \frac{\partial c(\not{0})}{\partial x^1} = 0 \tag{30}$$
$$\frac{\partial c(\not{2})}{\partial x^3} + \frac{\partial c(\not{3})}{\partial x^2} = 0 \tag{31}$$
$$\frac{\partial c(\not{2})}{\partial x^0} + \frac{\partial c(\not{0})}{\partial x^2} = 0 \tag{32}$$
$$\frac{\partial c(\not{3})}{\partial x^0} + \frac{\partial c(\not{0})}{\partial x^3} = 0. \tag{33}$$

现在来求解这组一阶偏微分方程式。先看方程(28): 引进常数$b_{12} = \mathrm{constant}$，令$\partial c(\not{1})/\partial x^2 =: b_{12}$，则由方程(28)，必有$\partial c(\not{2})/\partial x^1 = -b_{12}$，于是有

$$c(\not{1}) = b_{12}x^2 + g_1(\not{1}\,\not{2}) \tag{34}$$

$$c(\not{2}) = -b_{12}x^1 + g_2(\not{1}\,\not{2}). \tag{35}$$

第(2)，看方程(29): 引进常数$b_{13} = \text{constant}$，令$\partial c(\not 1)/\partial x^3 =: b_{13} = \partial g_1(\not 1\ \not 2)/\partial x^3$，于是$g_1(\not 1\ \not 2) = b_{13}x^3 + g_3(\not 1\ \not 2\ \not 3)$；再由方程(29)，必有$\partial c(\not 3)/\partial x^1 = -b_{13}$，于是得到

$$c(\not 1) = b_{12}x^2 + b_{13}x^3 + g_3(\not 1\ \not 2\ \not 3) \tag{36}$$

$$c(\not 3) = -b_{13}x^1 + g_4(\not 1\ \not 3). \tag{37}$$

第(3)，看方程(30): 引进常数$b_{10} = \text{constant}$，令$\partial c(\not 1)/\partial x^0 =: b_{10} = \partial g_3(\not 1\ \not 2\ \not 3)/\partial x^3$，于是$g_3(\not 1\ \not 2\ \not 3) = b_{10}x^0 + a_1$，这里$a_1$为常数；再由方程(30)，必有$\partial c(\not 0)/\partial x^1 = -b_{10}$，于是得到

$$c(\not 1) = b_{12}x^2 + b_{13}x^3 + b_{10}x^0 + a_1 \tag{38}$$

$$c(\not 0) = -b_{10}x^1 + g_5(\not 1\ \not 0). \tag{39}$$

第(4)，看方程(31): 引进常数$b_{23} = \text{constant}$，令$\partial c(\not 2)/\partial x^3 =: b_{23} = \partial g_2(\not 1\ \not 2)/\partial x^3$，于是$g_2(\not 1\ \not 2) = b_{23}x^3 + g_6(\not 1\ \not 2\ \not 3)$；再由方程(31)，必有$\partial c(\not 3)/\partial x^2 = \partial g_4(\not 1\ \not 3)/\partial x^2 = -b_{23} \Rightarrow g_4(\not 1\ \not 3) = -b_{23}x^2 + g_7(\not 1\ \not 3\ \not 2)$，于是得到

$$c(\not 2) = -b_{12}x^1 + b_{23}x^3 + g_6(\not 1\ \not 2\ \not 3) \tag{40}$$

$$c(\not 3) = -b_{13}x^1 - b_{23}x^2 + g_7(\not 1\ \not 3\ \not 2). \tag{41}$$

第(5)，看方程(32): 引进常数$b_{20} = \text{constant}$，令$\partial c(\not 2)/\partial x^0 =: b_{20} = \partial g_6(\not 1\ \not 2\ \not 3)/\partial x^0$，于是$g_6(\not 1\ \not 2\ \not 3) = b_{20}x^0 + a_2$；再由方程(32)，必有$\partial c(\not 0)/\partial x^2 = \partial g_5(\not 1\ \not 0)/\partial x^2 = -b_{20} \Rightarrow g_5(\not 1\ \not 0) = -b_{20}x^2 + g_8(\not 1\ \not 0\ \not 2)$，于是得到

$$c(\not 2) = -b_{12}x^1 + b_{23}x^3 + b_{20}x^0 + a_2 \tag{42}$$

$$c(\not 0) = -b_{10}x^1 - b_{20}x^2 + g_8(\not 1\ \not 0\ \not 2). \tag{43}$$

最后，看方程(33): 引进常数$b_{30} = \text{constant}$，令$\partial c(\not 3)/\partial x^0 =: b_{30} = \partial g_7(\not 1\ \not 3\ \not 2)/\partial x^0$，于是$g_7(\not 1\ \not 3\ \not 2) = b_{30}x^0 + a_3$；再由方程(33)，必有$\partial c(\not 0)/\partial x^3 = \partial g_8(\not 1\ \not 0\ \not 2)/\partial x^3 = -b_{30} \Rightarrow g_8(\not 1\ \not 0\ \not 2) = -b_{30}x^3 + a_0$，于是得到

$$c(\not 3) = -b_{13}x^1 - b_{23}x^2 + b_{30}x^0 + a_3 \tag{44}$$

$$c(\not 0) = -b_{10}x^1 - b_{20}x^2 - b_{30}x^3 + a_0. \tag{45}$$

表达式(38) (42) (44) (45) 是我们所期待的结果。这样，关于凯林矢量方程(17)–(26)的通解(27) 的显示表达式是：

$$\xi_\mu(x) = \frac{3c(\not\mu)}{3 - \Lambda\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu} \tag{46}$$

其中

$$\begin{pmatrix} c(\not{0}) \\ c(\not{1}) \\ c(\not{2}) \\ c(\not{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b_{10} & -b_{20} & -b_{30} \\ b_{10} & 0 & b_{12} & b_{13} \\ b_{20} & -b_{12} & 0 & b_{23} \\ b_{30} & -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_3 \\ a_3 \end{pmatrix} \tag{47}$$

其中$b_{\mu\nu}$，a_μ是10个独立的常数，所以(46)表明在以$g_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}$为度规的典型时空中有10个独立(或线性无关)的凯林矢量。典型时空是$N = 4$维的，注意$N(N+1)/2 = 10$，因此该典型时空的确具有最大对称性(见[28]，第13章)。

为方便，我们给出与式(46)相对应的逆变的凯林矢量。由协变的Beltrami 度规表达式(3)，可求得：

$$B^{\mu\nu}(x) = \sigma(x)\left(\eta^{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{3}x^\mu x^\nu\right).$$

于是无穷小保度规时空变换(14)中的逆变凯林矢量为

$$\xi^\mu(x) = B^{\mu\nu}(x)\xi_\nu(x) = \eta^{\mu\nu}c(\not{\mu}) - \frac{\Lambda}{3}x^\mu x^\nu a_\nu. \tag{48}$$

该保对称性的变换(14)成为：

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon\left(\eta^{\mu\nu}c(\not{\mu}) - \frac{\Lambda}{3}x^\mu x^\nu a_\nu\right), \quad \text{其中} \quad (|\epsilon| << 1). \tag{49}$$

到此，我们得到结论: Beltrami 度规(3) 是狭义相对论的时间-空间的基本度规。

III. NOETHER 定理和守恒荷

(A) Noether 定理：

考虑一个力学系统，它在t 时刻由拉格朗日量$L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 来描写，即系统的动力学行为由$L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 的拉格朗日方程来确定。如果在一个时空变换群

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow T \\ \mathbf{q} &\longrightarrow \mathbf{Q} \end{aligned} \tag{50}$$

下，系统的作用量$S \equiv \int L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})dt$ 不变，即

$$\int L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})dt = \int L(T, \mathbf{Q}, \acute{\mathbf{Q}})dT, \tag{51}$$

其中$\acute{\mathbf{Q}} \equiv d\mathbf{Q}/dT$。这时，Noether 定理断言：上述不变性会导致存在一个运动常数，这个运动常数被称为Noether 守恒荷，或守恒量。在无穷小变换下，(50) 中的T 和$\mathbf{Q}$ 可写为：

$$T = T(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \epsilon), \tag{52}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \epsilon), \tag{53}$$

其中ϵ 是一个与时间无关的无穷小参数，并且有

$$(T)_{\epsilon=0} = t, \tag{54}$$

$$(\mathbf{Q})_{\epsilon=0} = \mathbf{q}, \tag{55}$$

以及(51)式中函数$\acute{\mathbf{Q}}$ 为:

$$\acute{\mathbf{Q}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \epsilon) \equiv \frac{d\mathbf{Q}}{dT} = \frac{d\mathbf{Q}/dt}{dT/dt} = \frac{\dot{\mathbf{Q}}}{\dot{T}} = \frac{\dot{\mathbf{Q}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \epsilon)}{\dot{T}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \epsilon)}. \tag{56}$$

将(51)式写为

$$\int [L(T, \mathbf{Q}, \acute{\mathbf{Q}})\dot{T} - L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]dt = 0, \tag{57}$$

由此可证明力学量(相关证明参见[30][31][1])

$$G \equiv L\zeta + \sum_i \frac{\partial L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}^i}(\eta^i - \dot{q}^i\zeta) \tag{58}$$

是一个运动积分常数（或守恒量），其中

$$\zeta = \left[\frac{\partial T = \partial T(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \epsilon)}{\partial \epsilon}\right]_{\epsilon=0}, \tag{59}$$

$$\eta^i = \left[\frac{\partial Q^i(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \epsilon)}{\partial \epsilon}\right]_{\epsilon=0}. \tag{60}$$

即守恒量(58)满足

$$\dot{G} = 0. \tag{61}$$

(B) 时间-空间对称性生成的守恒荷：

由凯林矢量的定义方程式(15) (16) 可证明[28]：在无穷小保度规时空变换(14) $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon\xi^\mu$ 下：

$$B_{\mu\nu}(x) \to B'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}B_{\alpha\beta}(x) = B_{\mu\nu}(x') \tag{62}$$

作用量由度规确定(参见:(4)式)，可见作用量在这个保度规变换下是不变的：

$$S \equiv -mc\int\sqrt{B_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu} \to S' \equiv -mc\int\sqrt{B'_{\mu\nu}(x')dx'^\mu dx'^\nu} = -mc\int\sqrt{B_{\mu\nu}(x')dx'^\mu dx'^\nu} = S. \tag{63}$$

这样，使用我们求出的10个凯林(Killing)矢量(48) 和上述Noether 定理(58)，我们就可以推导出德西特/反德西特力学的10个守恒量。

1. 能量：

   取凯林矢量中的常数的值为：$b_{\mu\nu}=0,\ a_1=a_2=a_3=0,\ a_0=-c$，注意$x^0=ct$，并将这些常数代入(47) (48) 式，则由(49) 得到：

$$t' = t+\frac{\epsilon}{c}\xi^0 = t-\epsilon\left(1-\frac{\Lambda}{3}c^2t^2\right), \tag{64}$$

$$x'^i = x^i\left(1+\frac{\Lambda c^2 t\epsilon}{3}\right). \tag{65}$$

   比较(14) 和(50)，有

$$t'=T, \qquad \mathbf{x}'=\mathbf{Q}. \tag{66}$$

   这样，由(59) (60), 我们有

$$\zeta = -1+\frac{\Lambda c^2t^2}{3}, \quad \eta^i = x^i\frac{\Lambda c^2 t}{3}. \tag{67}$$

   将方程式(67)(7) 代入式(58)，并注意(66)，我们得到关于能量的Noether 荷G_{a^0}:

$$G_{a^0} = L\left(-1+\frac{\Lambda c^2t^2}{3}\right)+\sum_{i=1}^3\left[x^i\frac{\Lambda c^2 t}{3}-\dot{x}^i\left(-1+\frac{\Lambda c^2t^2}{3}\right)\right]\left[\left(\frac{m^2c^4}{L}\right)\times\left(\frac{-9\dot{x}^i+3\Lambda[-\mathbf{x}^2\dot{x}^i+(\mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}})x^i-c^2t(x^i-\dot{x}^it)]}{c^2[3+\Lambda(\mathbf{x}^2-c^2t^2)]^2}\right)\right]. \tag{68}$$

   将拉格朗日函数L 的表达式(7) 代入(68)，经过直接代数计算，我们就得到了德西特/反德西特不变狭义相对论力学的能量公式：

$$G_{a^0} \equiv E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}+\frac{\Lambda(\mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}})^2-\Lambda\mathbf{x}^2\dot{\mathbf{x}}^2}{3c^2}+\frac{\Lambda(\mathbf{x}-\dot{\mathbf{x}}t)^2}{3}}}. \tag{69}$$

   两点说明如下:

   (i) 引进德西特/反德西特不变狭义相对论的洛伦兹因子：

$$\Gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}+\Lambda\left(\frac{(\mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}})^2-\mathbf{x}^2\dot{\mathbf{x}}^2}{3c^2}+\frac{(\mathbf{x}-\dot{\mathbf{x}}t)^2}{3}\right)}}. \tag{70}$$

这样德西特/反德西特不变力学的能量(69)和拉格朗日量(7)就可紧凑地写为

$$E = mc^2\Gamma, \tag{71}$$

$$L = -mc^2(\sigma\Gamma)^{-1}, \tag{72}$$

其中σ 已在方程(3)中给出。当$\Lambda \to 0$ 时，我们看到$\Gamma \to \gamma \equiv (1-\dot{\mathbf{x}}^2/c^2)^{-1/2}$，$\gamma$ 就是通常狭义相对论的洛伦兹因子，而$E = mc^2\Gamma$ 就变回到通常狭义相对论的能量公式$E = mc^2\gamma$，L 也回到通常狭义相对论拉氏量(8)，说明在求德西特/反德西特不变狭义相对论力学能量的Noether 荷时我们所取的凯林矢量中的常数的值正确。

(ii) 由运动方程$\ddot{\mathbf{x}} = 0$ (即方程(5))，我们容易验证$\dot{\Gamma} = 0$，因此

$$\dot{E} = mc^2\dot{\Gamma} = 0, \tag{73}$$

这表明在德西特/反德西特不变狭义相对论中能量是守恒的。注意到拉氏量(8)是含时的，由这个含时拉氏量所生成的上述能量守恒定律是非平庸的。

2. 动量:

取凯林矢量中的常数的值为：$b_{\mu\nu} = 0,\ a_2 = a_3 = a_0 = 0,\ a_1 = -1$，并将这些常数代入(47) (48) 式，则由(49) 得到：

$$t' = t + \epsilon\frac{\Lambda}{3}tx^1, \tag{74}$$

$$x'^i = x^i + \epsilon\left(\delta^{i1} + \frac{\Lambda}{3}x^i x^1\right), \quad i = 1,\ 2,\ 3, \tag{75}$$

以及

$$\zeta = \frac{\Lambda}{3}tx^1,\ \eta^1 = 1 + \frac{\Lambda(x^1)^2}{3},\ \eta^2 = \frac{\Lambda x^1 x^2}{3},\ \eta^3 = \frac{\Lambda x^1 x^3}{3}. \tag{76}$$

将方程式(76)(7) 代入式(58)，我们得到关于动量的Noether 荷$G_{a^1} \equiv p^1$:

$$\begin{aligned} G_{a^1} \equiv p^1 \ =\ & L\left(\frac{\Lambda}{3}tx^1\right) + \sum_{i=1}^{3}\left[\delta^{i1} + \frac{\Lambda}{3}x^i x^1 - \dot{x}^i\left(\frac{\Lambda}{3}tx^1\right)\right]\left[\left(\frac{m^2c^4}{L}\right)\right. \\ & \left.\times\left(\frac{-9\dot{x}^i + 3\Lambda[-\mathbf{x}^2\dot{x}^i + (\mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}})x^i - c^2t(x^i - \dot{x}^i t)]}{c^2[3+\Lambda(\mathbf{x}^2 - c^2t^2)]^2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{77}$$

将拉格朗日函数L 的表达式(7) 代入(77)，经过直接代数计算，我们就得到了德西特/反德西特不变狭义相对论力学的动量分量p^1 公式：

$$p^1 = \frac{m\dot{x}^1}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2} + \Lambda\left(\frac{(\mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}})^2 - \mathbf{x}^2\dot{\mathbf{x}}^2}{3c^2} + \frac{(\mathbf{x}-\dot{\mathbf{x}}t)^2}{3}\right)}} = \text{constant}. \tag{78}$$

同理，令$a_i = -1$ ($i = 2,$或 3)，凯林矢量(48)中其它的参数$b_{\mu\nu}$，a_i 为零，可得到$G_{a^i} \equiv p^i$ =constant ($i = 2,\ 3$)。所以我们有：

$$
\begin{aligned}
p^i &= \frac{m\dot{x}^i}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2} + \Lambda\left(\frac{(\mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}})^2 - \mathbf{x}^2\dot{\mathbf{x}}^2}{3c^2} + \frac{(\mathbf{x} - \dot{\mathbf{x}}t)^2}{3}\right)}} \\
&= m\dot{x}^i\Gamma. \qquad (79)
\end{aligned}
$$

注意$\ddot{\mathbf{x}}^i = 0$，以及$\dot{\Gamma} = 0$，我们就证明了在典型时空中动量守恒定律成立：

$$
\dot{p}^i = 0, \quad 或 \quad \dot{\mathbf{p}} = 0. \qquad (80)
$$

3. 洛伦兹boost:

取凯林矢量中的常数（见式(48)和(47)）的值为：$b_{10} = 1$, 其它的$b_{\mu\nu} = 0$, $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$, ，并将这些常数代回(47) (48) 式，则由(49) 得到：

$$
\begin{aligned}
&t' = t - \frac{\epsilon x^1}{c}, \\
&x'^1 = x^1 - \epsilon ct, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3, \qquad (81)
\end{aligned}
$$

以及

$$
\zeta = \frac{-x^1}{c},\ \eta^1 = -ct,\ \eta^2 = \eta^3 = 0. \qquad (82)
$$

将方程式(82)(7) 代入式(58)，我们得到关于洛伦兹boost的Noether 荷$G_{b_{10}} \equiv K^1$:

$$
\begin{aligned}
G_{b_{10}} \equiv K^1 &= L\left(\frac{-x^1}{c}\right) + \sum_{i=1}^{3}\left[\delta^{i1}(-ct) - \dot{x}^i\left(\frac{-x^1}{c}\right)\right]\left[\left(\frac{m^2c^4}{L}\right)\right. \\
&\left.\times\left(\frac{-9\dot{x}^i + 3\Lambda[-\mathbf{x}^2\dot{x}^i + (\mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}})x^i - c^2t(x^i - \dot{x}^it)]}{c^2[3 + \Lambda(\mathbf{x}^2 - c^2t^2)]^2}\right)\right]. \qquad (83)
\end{aligned}
$$

将拉格朗日函数L 的表达式(7) 代入(83)，我们得到德西特/反德西特不变狭义相对论力学的洛伦兹boost 分量K^1 公式：

$$
K^1 = \frac{mc(x^1 - t\dot{x}^1)}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2} + \Lambda\left(\frac{(\mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}})^2 - \mathbf{x}^2\dot{\mathbf{x}}^2}{3c^2} + \frac{(\mathbf{x} - \dot{\mathbf{x}}t)^2}{3}\right)}} = \text{constant}. \qquad (84)
$$

同理，令$b_{i0} = 1$ ($i = 2,$或 3)，凯林矢量(48)中其它的参数为零，可得到$G_{b_{i0}} \equiv K^i$ =constant ($i = 2,\ 3$)。这样我们有：

$$
\begin{aligned}
K^i &= \frac{mc(x^i - t\dot{x}^i)}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2} + \Lambda\left(\frac{(\mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}})^2 - \mathbf{x}^2\dot{\mathbf{x}}^2}{3c^2} + \frac{(\mathbf{x} - \dot{\mathbf{x}}t)^2}{3}\right)}} \\
&= mc(x^i - t\dot{x}^i)\Gamma. \qquad (85)
\end{aligned}
$$

注意$\ddot{\mathbf{x}}=0$，以及$\dot{\Gamma}=0$，我们就证明了在典型时空中洛伦兹boost荷守恒定律成立：

$$\dot{K}^i=0, \quad \text{或} \quad \dot{\mathbf{K}}=0. \tag{86}$$

4. 角动量：

取凯林矢量中的常数（见式(48)和(47)）的值为：$b_{12}=-1$, 其它的$b_{\mu\nu}=0$, $a_0=a_1=a_2=a_3=0$, ，并将这些常数代回(47) (48) 式，则由(49) 得到：

$$t'=t, \quad x'^1=x^1-\epsilon x^2, \quad x'^2=x^2+\epsilon x^1, \quad x'^3=x^3, \tag{87}$$

以及

$$\zeta=0, \quad \eta^1=-x^2, \quad \eta^2=x^1, \quad \eta^3=0. \tag{88}$$

将方程式(88)(7) 代入式(58)，我们得到在典型空间中关于角动量的Noether 荷的第3个分量：

$$\begin{aligned} G_{b_{12}}\equiv L^3 &= \sum_{i=1}^{3}\left[\eta^i\right]\left[\left(\frac{m^2c^4}{L}\right)\right. \\ &\quad \left.\times\left(\frac{-9\dot{x}^i+3\Lambda[-\mathbf{x}^2\dot{x}^i+(\mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}})x^i-c^2t(x^i-\dot{x}^it)]}{c^2[3+\Lambda(\mathbf{x}^2-c^2t^2)]^2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{89}$$

将拉格朗日函数L 的表达式(7) 代入(89)，我们得到德西特/反德西特不变狭义相对论力学的角动量分量L^3 公式：

$$L^3=\frac{m(x^1\dot{x}^2-x^2\dot{x}^1)}{\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}+\Lambda\left(\frac{(\mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}})^2-\mathbf{x}^2\dot{\mathbf{x}}^2}{3c^2}+\frac{(\mathbf{x}-\dot{\mathbf{x}}t)^2}{3}\right)}}=\text{constant}. \tag{90}$$

同理，令$b_{23}=-1$ (或 $b_{13}=-1$)，凯林矢量(48)中其它的参数为零，可得到$G_{b_{23}}\equiv L^1$ =constant (或$G_{b_{13}}\equiv -L^2$ =constant)。这样我们有：

$$\begin{aligned} L^i &= \frac{m\epsilon^i{}_{jk}(x^j\dot{x}^k)}{\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}+\Lambda\left(\frac{(\mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}})^2-\mathbf{x}^2\dot{\mathbf{x}}^2}{3c^2}+\frac{(\mathbf{x}-\dot{\mathbf{x}}t)^2}{3}\right)}} \\ &= m\epsilon^i{}_{jk}(x^j\dot{x}^k)\Gamma. \end{aligned} \tag{91}$$

注意$\ddot{\mathbf{x}}^i=0$，以及$\dot{\Gamma}=0$，我们推导出了在典型时空中的粒子角动量守恒定律成立：

$$\dot{L}^i=0, \quad \text{或} \quad \dot{\mathbf{L}}=0. \tag{92}$$

到此，我们求出来了全部10个独立的守恒量，这是四维Beltrami度规所确定的典型时空具有最大对称性的展现。基于上述两节的结果，我们可以讨论德西特/反德西特-不变狭义相对论力学的正则形式，并进而通过正则量子化构造德西特/反德西特-不变的狭义相对论量子力学。作者与合作者在文献[21]已完成了这项工作，本文的下一节将简要录入我们在[21]的主要相关结果。

IV. 德西特/反德西特-不变的狭义相对论量子力学 [21] [1]

1. **相对论性经典力学的正则形式：** 使用德西特/反德西特-不变的狭义相对论力学的拉氏函数(7)我们得到正则动量π_i和正则能量（或哈密尔顿量）H:

$$\pi_i \;=\; \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = -m\sigma(x)\Gamma B_{i\mu}\dot{x}^\mu \tag{93}$$

$$\begin{aligned} H \;&\equiv\; H^{(\pm)} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^i - L = mc\sigma(x)\Gamma B_{0\mu}\dot{x}^\mu \\ &=\; \frac{1}{2B^{00}}\left\{2cB^{0i}\pi_i \pm c\sqrt{4(B^{0i}\pi_i)^2 - 4B^{00}(B^{ij}\pi_i\pi_j - m^2c^2)}\right\}, \end{aligned} \tag{94}$$

其中协变Beltrami矩阵$B_{\mu\nu}$ 和$\sigma(x)$ 见(3)，因此逆变Beltrami矩阵分量为：

$$\begin{aligned} &B^{00} = \sigma(x)\left(1 - \Lambda\frac{c^2t^2}{3}\right), \quad B^{0i} = -\sigma(x)\Lambda\frac{ctx^i}{3}, \\ &B^{ij} = \sigma(x)\left(\eta^{ij} - \Lambda\frac{x^ix^j}{3}\right). \end{aligned} \tag{95}$$

将π_i 和$H \equiv -c\pi_0$合并在一起，我们可在典型空间中将正则能量-动量写成4分量协变矢量形式：

$$\pi_\mu \equiv (\pi_0,\ \pi_i) = (-\frac{H}{c}, \pi_i) = -m\sigma\Gamma B_{\mu\nu}\dot{x}^\nu = -mcB_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{ds}. \tag{96}$$

由此可得到对应的色散关系：

$$B^{\mu\nu}\pi_\mu\pi_\nu \;=\; m^2c^2. \tag{97}$$

动力学由系统的正则方程描写：

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial \pi_i} = \{x^i,\ H\}_{PB} \tag{98}$$

$$\dot{\pi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} = \{\pi_i,\ H\}_{PB}, \tag{99}$$

以及

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \tag{100}$$

其中泊松括号(Poisson Bracket)的定义是

$$\{f, g\}_{PB} \equiv \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial \pi_i} - \frac{\partial f}{\partial \pi_i} \frac{\partial g}{\partial x^i} \right), \tag{101}$$

式中的f和g是两个任意函数。可验知：

$$\{x^i, \pi_j\}_{PB} = \delta^i_j, \ \ \{x^i, x^j\}_{PB} = 0, \ \ \{\pi_i, \pi_j\}_{PB} = 0. \tag{102}$$

2. **三点说明：**(i)德西特/反德西特-不变狭义相对论力学的正则形式是含时哈密尔顿系统；(ii)对于自由粒子，德西特/反德西特-不变狭义相对论力学的物理测量能量-动量是守恒的Noether荷，而不是正则能量和正则动量。二者不相等，即$E \neq H$，$|\mathbf{p}| \neq |\boldsymbol{\pi}|$。前者是力学系统的运动积分，后者制约系统的演化；(iii)注意当$\Lambda \neq 0$时，德西特/反德西特-不变的狭义相对论力学的哈密尔顿量是$H^{(\pm)} = \frac{1}{2B^{00}}\left\{2cB^{0i}\pi_i \pm c\sqrt{4(B^{0i}\pi_i)^2 - 4B^{00}(B^{ij}\pi_i\pi_j - m^2c^2)}\right\}$ (方程(94))；而当$\Lambda \to 0$时，这个哈密尔顿量变回到庞加莱不变的爱因斯坦狭义相对论的哈密尔顿量$H^{(\pm)}_{Eins} = \pm\sqrt{c^2\boldsymbol{\pi}^2 + m^2c^4}$。值得指出的是由于$|H^{(+)}_{Eins}| = |H^{(-)}_{Eins}|$，所以在量子化后，由$H_{Eins}$引起的正负能态的演化是相同的。然而，在$\Lambda \neq 0$时，$|H^{(+)}| \neq |H^{(-)}|$，由$H$引起的正负能态的演化是不相同的（或不对称的），宇宙学常数的这种效应可能造成宇宙演化中正反粒子的不对称性，揭示这种不对称性的机理一直是粒子宇宙学的重大疑难课题（参见[32]），宇宙中的$\Lambda \neq 0$可能是造成这种不对称性的基本原因。

3. **德西特/反德西特-不变的狭义相对论力学的量子化：** 力学的拉格朗日-哈密尔顿形式是量子化的基础。将经典力学中的泊松括号替换为对应算子的对易子运算，即$\{x, \pi\}_{PB} \Rightarrow \frac{1}{i\hbar}[x, \hat{\pi}]$，经典力学就被量子化了。由公式(102)我们得到正则量子化的基本对易子：

$$[x^i, \ \hat{\pi}_j] = i\hbar\delta^i_j, \qquad [\hat{\pi}_i, \ \hat{\pi}_j] = 0, \qquad [x_i, \ x_j] = 0. \tag{103}$$

它的四维形式为：[21] [1]

$$[x^\mu, \hat{\pi}_\nu] = i\hbar\delta^\mu_\nu, \quad [x^\mu, x^\nu] = 0, \quad [\hat{\pi}_\mu, \hat{\pi}_\nu] = 0, \tag{104}$$

其中$\hat{\pi}_0 = -\hat{H}/c$。称上式为海森堡(Heisenberg)代数，为书写方便，以下去掉算子字母上面的“hat”记号。对于德西特/反德西特-不变的狭义相对论力学，上述海森堡代数(104)的解为：[21] [1]

$$\pi_\mu = -i\hbar(\partial_\mu + \frac{\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}{2}) = -i\hbar(-B)^{-\frac{1}{2}}\partial_\mu(-B)^{\frac{1}{2}}, \tag{105}$$

其中$\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}$是以$B_{\mu\nu}(x)$为度规的时空的克里斯菲尔联络，$B = \det(B_{\mu\nu}) = -\sigma(x)$。经典的色散关系(97)可写成对称形式$(-B)^{-\frac{1}{4}}\pi_\mu(-B)^{\frac{1}{4}}B^{\mu\nu}(-B)^{\frac{1}{4}}\pi_\nu(-B)^{-\frac{1}{4}} = m^2c^2$. 这时，德西特/反德西特-不变的狭义相对论的单粒子波方程就导出来了：

$$(-B)^{-\frac{1}{4}}\pi_\mu(-B)^{\frac{1}{4}}B^{\mu\nu}(-B)^{\frac{1}{4}}\pi_\nu(-B)^{-\frac{1}{4}}\phi(\mathbf{x},t) \ = \ m^2c^2\phi(\mathbf{x},t) \ , \tag{106}$$

其中$\phi(\mathbf{x},t)$ 是粒子的波函数。将(105)代入(106)，我们得到

$$\frac{1}{\sqrt{-B}}\partial_\mu(B^{\mu\nu}\sqrt{-B}\partial_\nu)\phi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi = 0, \tag{107}$$

这正是在以$B_{\mu\nu}$ 为度规的弯曲空间中的克莱因-高登(Klein-Gordon)方程，也是德西特/反德西特-不变的狭义相对论量子力学的基本方程。

4. **两点注释:** (i)能量-动量算符：合并方程(71)和(79)，得到4-动量表达式：

$$p^\mu \equiv \{p^0,\ p^i\} = \{E/c,\ p^i\} = m\Gamma\dot{x}^\mu. \tag{108}$$

比较$L = -mc\frac{ds}{dt}$(见(6))和$L = -mc^2/(\sigma\Gamma)$(见(72))，得到：

$$dt = \frac{\sigma\Gamma}{c}ds, \quad \text{and} \quad \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{c}{\sigma\Gamma}\frac{dx^\mu}{ds}, \tag{109}$$

并注意式(96) (即$\pi_\mu = -m\sigma\Gamma B_{\mu\nu}\dot{x}^\nu = -mcB_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{ds}$)，将(109)代入(108)，得到：

$$p^\mu = \frac{mc}{\sigma}\frac{dx^\mu}{ds} = -\frac{1}{\sigma}B^{\mu\nu}\pi_\nu. \tag{110}$$

将公式(105)代入(110)，给出：

$$p^\mu \ = \ i\hbar[(\eta^{\mu\nu} - \Lambda\frac{x^\mu x^\nu}{3})\partial_\nu + \Lambda\frac{5x^\mu}{6}]. \tag{111}$$

p^μ 和算符$L^{\mu\nu} = (x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu)/i\hbar$ 构成如下代数：

$$\begin{aligned}
[p^\mu, p^\nu] \ &= \ \frac{\Lambda\hbar^2}{3}L^{\mu\nu} \\
[L^{\mu\nu}, p^\rho] \ &= \ \eta^{\nu\rho}p^\mu - \eta^{\mu\rho}p^\nu \\
[L^{\mu\nu}, L^{\rho\sigma}] \ &= \ \eta^{\nu\rho}L^{\mu\sigma} - \eta^{\nu\sigma}L^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma}L^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho}L^{\nu\sigma}.
\end{aligned} \tag{112}$$

当$\Lambda \neq 0$时，这正是德西特/反德西特代数。说明上述基于海森堡代数(104)的正则量子化方案是保持德西特/ 反德西特不变狭义相对论的时空对称性的。

(ii) 波方程(106)中的波函数$\phi(x)$ 可以被当做一个标量场$\phi(x)$，这时方程(106) 可以通过最小作用量原理由下面的作用量A 推导出来:

$$A = \int d^4x \sqrt{-B} B^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi. \tag{113}$$

也就是说，方程(106) 可以用$\delta A = 0$ 推导出来。这种推导波方程的方法称为“场作用量方法”。用这种方法来推导在弯曲空间中的自旋为1/2粒子的量子力学狄拉克(Dirac)方程是方便的。

V. 德西特/反德西特-不变狭义相对论的可能实验证据

在现实宇宙空间中是否有$\Lambda \neq 0$的实验事实，是决定狭义相对论的德西特/反德西特-不变性的关键。在本文的“引言”中，我们已指出：宇宙加速膨胀意味着时空中存在一个等效宇宙学“常数”$\Lambda_{\rm eff} \equiv \Lambda + 8\pi G \rho_{\rm dark\ energy} \neq 0$，其中$\Lambda$是普适的爱因斯坦宇宙学常数。这种加速膨胀的发现[8][9]使人们认识到“$\Lambda \neq 0$”是可能的，但并没有决定性地确定Λ的值是非0的。事实上在存在2个未知数（即：Λ 和$\rho_{dark\ energy}$）的情况下，人们还必须寻求对另一个相关效应的研究来确定Λ。在一些理论工作中取$\Lambda = 0$，然后定出$\rho_{dark\ energy}$ 并讨论它[10]，这样作是有人为性的，不具备可靠性。在本节中我们关心会导致确定Λ的数值的宇宙学实验：即关于精细结构常数$\alpha = e^2/(\hbar c)$是否随时间-空间而变化的天文观测实验[25–27] [1, 2, 20–23]。

首先，我们指出精细结构常数$\alpha = e^2/(\hbar c)$不随时间-空间而变化是庞加莱不变狭义相对论的理论预言。由于庞加莱不变狭义相对论的基本度规为$\eta_{\mu\nu} = {\rm diag}\{1, -1, -1, -1\}$（闵科夫斯基空间度规），在时空点$\{t,\ \mathbf{r} \equiv x^1\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + x^3\mathbf{k}\}$ 处的氢原子中电子波函数所满足的狄拉克方程是：

$$i\hbar\partial_t\psi = \left(-i(\hbar c)\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + m_e c^2\beta - (e^2)\frac{1}{r}\right)\psi, \tag{114}$$

其中$\nabla \equiv \partial/\partial\mathbf{r}$；$r$表示原子核与电子之间的距离；$(\hbar c)$ 是方程中电子的“狄拉克动能算子”$(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla)$项的系数，$(e^2)$是它的位能项系数。这两个系数之比就是原子物理中精细结构常数的定义：$\alpha \equiv e^2/(\hbar c)$。（注意：天文观测到的是原子能级之间跃迁的光谱线，来自普朗克能标的物理对这种谱线的任何效应都是完全可以忽略的。）我们再考虑另一时空点：$\{t' = t + a^0,\ \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}\}$，其中$a^0$, $\mathbf{a}$都是常数，所以$\partial_{t'} = \partial_t$, $\nabla' \equiv \partial/\partial\mathbf{r}' = \partial/\partial(\mathbf{r}+\mathbf{a}) = \nabla$，并且原子核与电子距离不变：$r' = r$。又由于

闵科夫斯基空间度规$\eta_{\mu\nu}$与时空坐标无关，所以在新时空点上的原子中电子的狄拉克方程不变，它和在$\{t,\ \mathbf{r}\}$的方程式(114)完全一样。于是我们得到结论：在时空点$\{t',\ \mathbf{r}'\}$的精细结构常数α'和在时空点$\{t,\ \mathbf{r}\}$的精细结构常数α一样，即：

$$\alpha' = \alpha. \tag{115}$$

精细结构常数α不随时间和空间而变化是通常的庞加莱不变狭义相对论的精确预言。

庞加莱不变狭义相对论的氢原子问题(114)是精确可解的。用符号W表示狄拉克方程(114)的本征态驻波能量（见[1]）：

$$i\hbar\partial_t\psi = W\psi. \tag{116}$$

将(116)代入(114)给出：

$$W\psi = \left(-i\hbar c\vec{\alpha}\cdot\nabla + m_e c^2\beta - \frac{e^2}{r}\right)\psi \equiv H_0(r,\hbar,m_e,e)\psi. \tag{117}$$

这就是氢原子的狄拉克方程的驻波谱方程，它的精确解是：

$$\begin{aligned} W = W_{n,\kappa} \ &= \ m_e c^2\left(1+\frac{\alpha^2}{(n-|\kappa|+s)^2}\right)^{-1/2} \\ &\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c}, \quad\ \ |\kappa| = (j+1/2) = 1,\ 2,\ 3\ \cdots \\ &s = \sqrt{\kappa^2-\alpha^2}, \quad\ \ n = 1,\ 2,\ 3\ \cdots. \end{aligned} \tag{118}$$

关于它的α 展开式是：

$$W = \hbar\omega = m_e c^2\left(1-\frac{\alpha^2}{2n^2}+\alpha^4\left(\frac{3}{8n^2}-\frac{1}{2n^3|\kappa|}\right)+\cdots\right). \tag{119}$$

由上式可以看出电子质量m_e 只是$W = \hbar\omega$表达式的整体相乘因子，对量子数不同的谱线的相对劈裂没有影响。这种相对劈裂由α 确定。不同量子数对应的能级之间的比值（以及能级之间跃迁频率的比值）是α的单变量函数。在天文观测中，所有不同频率谱线的共同移动由宇宙学多普勒红移因子z来描写，而从谱线的相对移动中可提取出关于α数值的信息。

$\alpha \equiv e^2/(\hbar c)$的改变可以通过测量类星体光线穿过星际间的尘埃云区后，由原子能级间跃迁造成的吸收谱线的移动来探测[25–27]。在红移$z = \lambda_{obs}/\lambda_{lab} - 1$处相对波数$\omega_z$是可以通过观测来确定的。将它与地球实验室中的对应元素谱线测量值ω_0相比较，可以通过使用下式确定在红移z处的精细结构常数α_z

$$\omega_z = \omega_0 + Q\,\frac{\alpha_z^2-\alpha_0^2}{\alpha_0^2}, \tag{120}$$

上式中的ω_0和α_0分别是在$z = 0$处（即地球实验室）测得的谱线的波数（或频率）和精细结构常数；Q是谱线ω_0所对应的量子跃迁对α-改变的敏感系数。关键之点在于这个系数是可以用关于相对论性多电子理论的数值计算方法（比如相对论性哈特里-福克(Hartree-Fock)方程）足够精确地算出来的。（在此我们请读者注意：至今所有关于Q的计算都是基于庞加莱不变的狭义相对论量子力学，还没有基于德西特/反德西特-不变狭义相对论量子力学计算Q值的工作，后面我们将会讨论这一点。）这样，原则上，人们在类星体的吸收光谱中测得了ω_z，就可利用(120)式转换为我们想得到的α_z。不同元素和不同衰变道的Q值是不一样的，通过选取和比较多个不同的道的Q值，可以极大地提高α的改变$\Delta\alpha/\alpha_0 \equiv (\alpha_z - \alpha_0)/\alpha_0$对$\omega_z/\omega_0$ 变化的敏感程度的量级。在观测实验报告[25–27]所使用的数据处理方法被称为MM法（多衰变道方法），就是基于(120)导出的巧妙方法[1, 33, 34]。

使用上述方法，Webb *et al* [25] 在1999年报告了使用Keck天文台的望远镜对30个$\Delta\alpha/\alpha$观测的结果，他们发现在3σ的置信度内$\Delta\alpha/\alpha = (\alpha_z - \alpha_0)/\alpha_0$在高红移处变小的结果；到2004年他们做了143个这样的测量，其结论仍是$\Delta\alpha/\alpha$在高红移处变小的结果，而其置信度提高到5σ的水平[26][35, 36]。近年来，这一观测研究延展到处理VLT望远镜的观测数据。VLT的观测方向与Keck不同，结果令人吃惊地发现了α-改变的空间各向异性：与Keck的结果相反，VLT的数据表明$\Delta\alpha/\alpha = (\alpha_z - \alpha_0)/\alpha_0$在高红移处变大。于是将Keck 的样本与VLT的样本结合起来，$\Delta\alpha/\alpha$呈现一个空间偶极子结构，文献[27][37]报告了结果，置信度为$\sim 4.2\sigma$。

这些实验在相当高的置信度$(4\sigma \sim 5\sigma)$水平上表明原子结构中的精细结构常数在高红移处偏离$\alpha = \alpha_0$，而且是与红移z以及方向Ω相关的，式(115) 中的$\alpha' = \alpha_z(\Omega)$，于是这些实验结果表明：

$$\alpha_z(\Omega) \neq \alpha, \qquad \left|\frac{(\alpha_z(\Omega) - \alpha)}{\alpha}\right|_{(higher\ z)} \sim 10^{-5}. \tag{121}$$

这个结果是与庞加莱不变狭义相对论的预言(115) 相冲突的，说明了庞加莱不变狭义相对论量子力学与远距离处（大致$z \simeq 1 \sim 2$ 处）的原子物理实验结果相冲突[5]。如所周知，庞加莱不变狭义相对论对“地球实验室”是精确适用的。这种在z 适当大时理论与实验的偏

[5] 这里我们没有讨论宇宙学中的Friedmann-Robertson-Walker(FWR) 度规对原子能级移动的可能影响。在[22]中，我们使用[38]的结果具体对氢原子能级的影响作了估算：由于FRW度规造成的氢原子能级的移动$\Delta E \sim 10^{-77}eV$，氢原子中电子的Rydberg能量是$E = m_e c^2\alpha^2/2$，这样$\Delta E = m_e c^2\alpha\Delta\alpha$，从而$\Delta\alpha = \Delta E/(\alpha m_e c^2) \simeq 0.27 \times 10^{-80}$。可见这种来自FRW度规的$\alpha$-改变（如果存在的话）是完全微不足道的和完全可忽略不计的。

离证实了普通庞加莱不变狭义相对论是有范围限制的，狭义相对论是有定域性的。从宇宙学的观点看，狭义相对论中的非定域的闵可夫斯基时空度规$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\{1, -1, -1, -1\}$ 是有局限性的，完整的狭义相对论的基本时空度规应该是Beltrami度规(3)，现实的狭义相对论是德西特/反德西特狭义相对论。也就是说，在今天，德西特/反德西特狭义相对论是有实验支持的新物理。

VI. 结语与讨论

本文评介和探讨了德西特/反德西特-不变狭义相对论，它是通常的庞加莱不变狭义相对论的扩充，并且是有实验支持的新物理理论。

我国学者对德西特/反德西特-不变狭义相对论的建立有开创性的贡献。华罗庚和陆启铿早年研究过典型域(Classical Domains) 中的调和函数理论[7]，1974年陆启铿、邹振隆、郭汉英创造性地将这这一理论方法用于几何学中的最大对称性空间分析[5]，发现了最一般的狭义相对论基本时空度规（即Beltrami度规），建立了典型时空理论，进而建议了德西特/反德西特-不变狭义相对论。

本文用文献[1]的观点评介上述德西特/反德西特-不变狭义相对论和德西特/反德西特-不变狭义相对论量子力学[21]。

相对论原理要求：狭义相对论的时空基本度规应是爱因斯坦方程的真空解。从这个观念出发，我们导出了Beltrami度规中的几何参数λ和物理中的普适爱因斯坦常数Λ 的关系。进而，我们又从Beltrami度规出发，求出了关于自由粒子的德西特/反德西特相对论力学的拉氏量，证明了在该典型时空中的自由粒子的惯性运动定律；文中我们求解了10个关于Beltrami度规的凯林(Killing)矢量的一阶偏微分方程，得到了通解，发现独立凯林矢量的数目是10$(= N(N+1)/2)$，从而证明典型空间是具有最大对称性的四维时空。凯林矢量是保度规的无穷小时空变换的生成元，从而也是保作用量时空变换的生成元，根据Noether定理，我们就导出了自由粒子的德西特/反德西特相对论力学的10守恒量：$\{E,\ \mathbf{p},\ \mathbf{K},\ \mathbf{L}\}$，其结果和文献[1, 21]中基于典型域方法所导出的守恒量完全相同。这是对陆-邹-郭所使用的典型域方法的一个验证。

基于上述拉氏理论，我们给出了德西特/反德西特-不变狭义相对论力学的正则形式。与已知的庞加莱不变狭义相对论的正则形式相比较，前者有诸多特点：(i)是含时哈密尔顿系统；(ii)正则能量（哈密尔顿量）和正则动量都不是守恒量；(iii) 正、反正则能量态的色散关系不对称（见(94)式）。注意，在通常的庞加莱不变狭义相对论中，这种色散关系是对称的，从而造成了至今无法解释的宇宙中反物质缺失的重大困难。我们猜测：由于

非零宇宙学常数而造成的这种不对称性相对论理论可能导致克服这一重大困难；等等。所有这些区别都源于宇宙学常数$\Lambda \neq 0$。

本文中，我们阐明了用标准的正则量子化方法来构造德西特/反德西特-不变狭义相对论量子力学的程序，给出了想要的相对论性波函数方程式。这种量子化方案的合理性反映在三方面：(i)正则能、动量的算符表达式来自求解海森堡代数；(ii)由色散关系导出的波方程是显示保Beltrami度规变换不变的；(iii)这样导出的10个Noether荷算符构成德西特/反德西特代数，表明了该理论的量子化海森堡代数和德西特/反德西特群代数的相容性。我们建议的德西特/反德西特不变相对论量子力学是自洽的。

由于在“地球”近邻，Betrami度规回到普通的闵科夫斯基度规，德西特/反德西特不变狭义相对论量子力学也变回到普通的相对论量子力学，所以在“地球”邻近的原子跃迁光谱实验中观测不到二者的区别，但是对于遥远（比如~ 10 亿光年以远）天体处的原子中的量子跃迁，两个量子力学理论的结果将有显著区别。又由于宇宙中遥远处的原子辐射光谱或吸收光谱常常是天文观测可以精确测量的，因此研究这种观测测量结果有可能在物理上决定对庞加莱不变或者德西特/反德西特不变狭义相对论的取舍。在原子物理中精细结构常数α 的数值是由原子光谱的劈裂来测量的。因此实验观测远处（比如$z \approx 1 \sim 3$）的光谱劈裂，可以测量处那里（那时）的α_z，将它与地球实验室的α_0 相比较，可得出决定性的物理结果。庞加莱不变狭义相对论量子力学预言$\alpha_z = \alpha_0$，而德西特/反德西特不变狭义相对论量子力学的预言是$\alpha_z \neq \alpha_0$。近十多年来有很多这方面的天文实验观测报告（比如：[25–27, 35, 36]），发现在$4\sigma \sim 5\sigma$ 置信度内$\alpha_z \neq \alpha_0$，这些观测明确地否定了庞加莱不变狭义相对论量子力学预言。是对德西特/反德西特不变狭义相对论量子力学的可能支持[1, 2]。这也是本文评介的一个主要结果。

不过我们对上述观测实验有如下的批评：回到文中提到的Q-值的计算。Q是谱线ω_0 所对应的量子跃迁对α- 改变的敏感系数。使用这个数值可以把天文观测到谱线劈裂和移动转换为α-的改变。现有实验所用的Q值取自[33, 34] 的计算。值得指出的是[33, 34]仅仅是基于庞加莱不变狭义相对论性多电子理论的数值计算结果，而不是基于一般的德西特/反德西特-不变狭义相对论的结果。这样，现有实验就先验地假定了$\Lambda = 0$的庞加莱不变狭义相对论在高红移（$z : 1 \sim 3$）处适用，这显然会造成实验结果的不可靠性。特别当实验结果表明$\alpha_z \neq \alpha_0$，庞加莱不变狭义相对论在高红移处不适用时，使用[33, 34] 的计算结果的观测实验是自相矛盾的。当然这种自相矛盾恰恰证明了庞加莱不变狭义相对论在高红移处不适用，从而支持了$\Lambda \neq 0$的狭义相对论，这一点我们上面已经指出。但是[25–27, 35, 36]所给出的α-改变的实验数值结果不可信，其中包含有来自由于没有考虑$\Lambda \neq 0$而造成的系统误差。正确的做法是应该基于$\Lambda \neq 0$的德西特/反德西特狭义相对论

的多电子理论来计算Q值，然后用这个考虑了Λ的Q来确定α的可能改变。

最后我们指出，通过观测类星体吸收光谱来测量α-改变的实验本质上是对宇宙中远处原子光谱的天文观测，是非常低能标的物理实验。一些工作者把这样测到的结果在理论上归因于普朗克能标物理（如：超弦与M-理论、额外维理论等等）是非常牵强的，这有悖于物理学中的标度性（或等级性(hierarchy)）观念。如所周知，通常"地球"实验室中的原子光谱精细结构现象，是用狭义相对论量子力学来描写的。对于$z \neq 0$ 处的原子光谱的精细结构现象用拓展的狭义相对论量子力学来描写和解释是合理的。无疑，探索狭义相对论的拓展是对物理学整体基础的审视，是非常重要和有价值的新物理探讨。

致谢：作者感谢他的所有工作合作者的贡献，感谢和参与该领域工作的学者的很多讨论。本文受到国家自然科学基金委11375169项目资助。

参考文献

[1] Yan M L. De Sitter Invariant Special Relativity. World Scintific Publising, Singapore, 2015. 262

[2] Feng S S, Yan M L. Implication of Spatial and Temporal Variations of the Fine-Structure Constant. Int J Theor Phys, 2016, 55: 1049-1083.

[3] Zhao W, Santos L. Preferred axis in cosmology, The Universe, 2015, no.3: 9-33 (Invited review), arXiv:1604.05484[astro-ph.CO]

[4] Tretyakova D A, Seeking for the observational manifestation of de Sitter Relativity. arXiv: 1604.00809[hep-ph]

[5] Lu Q K, Zou Z L, Guo H Y, Kinematics and cosmologic red shift phenomena in classical domain space-time (in Chinese). Acta Physica Sinica, 1974, 29: 225-233 [陆启铿，邹振隆，郭汉英，典型时空中的运动效应和宇观红移现象. 物理学报，1974, 23 卷: 225-233]

[6] Guo H Y, Hua L K and Einstein's relativity with its extensions(in Chinese). College Physics, 2010, 29: no 8 [郭汉英，华罗庚与爱因斯坦相对论及其扩展，大学物理，2010, 29 卷: 第8 期]

[7] Hua L K (华罗庚)，Look K H (陆启铿)，Theory of Harmonic Functions in Classical Domains. Scientia Sinica, 1959, 8: 1031-1094.

[8] Riess A G, et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. Astro. J. 1998, 116: 1009-1038

[9] Perlmutter S , et al. Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae.

Astro. J. 1999, 517: 565-586 [astro-ph/9812133].

[10] Peebles P J E, Ratra B, The cosmological constant and dark energy. Rev. Mod. Phys. 2003, 75: 559-606

[11] Padmanabhan T, Cosmological constant: The Weight of the vacuum. Phys. Rep. 2003, 380: 235-320.

[12] Yan M L, Hu S, Huang W, et al. On determination of the geometric cosmological constant from the OPERA experiment of superluminal neutrinos. Modern Physics Letters A, 2011, 27: 1250041. arXiv:1112.6217 [hep-ph].

[13] Guo H Y, Huang C G, Xu Z, et al. On special relativity with cosmological constant. Phys. Lett. 2004, A331: 1-7

[14] Guo H Y, Huang C G, Xu Z, et al. On Beltrami Model of de Sitter Spacetime. Mod. Phys. Lett. 2004, A19: 1701-1710

[15] Guo H Y, Huang C G, Xu Z, et al. Three kinds of special relativity via inverse Wick rotation. Chin. Phys. Lett. 2005, 22: 2477-2480. hep-th/0405137

[16] Tian Y, Guo H Y, Huang C G et al. Mechanics and Newton-Cartan-like gravity on the Newton-Hooke space-time. Phys. Rev. 2005, D71: 044030

[17] Guo H Y, Zhou B, Tian Y, et al. The Triality of Conformal Extensions of Three Kinds of Special Relativity. Phys. Rev. 2007, D75: 026006

[18] Chang Z, Chen S X, Guan C B, et al. Cosmic ray threshold in an asymptotically dS spacetime. Phys.Rev. 2005, D71: 103007

[19] Lu Q K, Heisenberg Group and Energy-Momentum Conservative Law in de-Sitter Spaces. Commu. Theor. Phys. 2005, 44: 389-392

[20] Chen S X, Xiao N C, Yan M L, Variation of the fine-structure constant from the de Sitter invariant special relativity. Chinese Phys. 2008, C32: 612-616

[21] Yan M L, Xiao N C, Huang W, et al. Hamiltonian Formalism of de-Sitter Invariant Special Relativity. Commu. Theor. Phys. 2007, 48: 27-36 hep-th/0512319.

[22] Yan M L, One Electron Atom in Special Relativity with de Sitter Space-Time Symmetry. Commun. Theor. Phys. 2012, 57: 930-952

[23] Yan M L, One Electron Atom in Special Relativity with de Sitter Space-Time Symmetry (II): —Higher Order Contributions. Commun. Theor. Phys. 2014, 62: 189-195

[24] Zhang Y Z, Special Relativity and Its Experimental Foundations. World Scientific 1997. 308

[25] Webb J K , Flambaum V V, Churchill C W, et al. Search for Time Variation of the Fine Structure Constant. Phys. Rev. Lett. 1999, 82: 884-887

[26] Webb J K, et al. Further Evidence for Cosmological Evolution of the Fine Structure Constant. Phys. Rev. Lett. 2001, 87: 091301

[27] Webb J K, King J A, Murphy M T, et al. Indications of a Spatial Variation of the Fine Structure Constant. Phys. Rev. Lett. 2011, 107: 191101

[28] Weinberg S, Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity. John Wiley & Sons, Inc. 1972. 657

[29] Landau L D and Lifshits E M, The Classical Theory of Fields. Fourth revised English edition, Beijing: Pergamon press, 1994. 402

[30] Desloge E A, Classical Mechanics. John Wiley, New york, 1982. 991

[31] Arnold V l, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer, New York, 1989. 516

[32] Huang F P, Li M Z, Gu P H, et al. Origin of the matter-antimatter asymmetry in the universe (in Chinese). Chinese Science Bulletin, 2016, 61: 1151-1156 [黄发朋，李明哲，顾佩洪，张新民，宇宙正反物质不对称的起源，科学通报，2016 年第61 卷第11 期：1151-1156]

[33] Dzuba V A, Flambaum V V, and Webb J K, Space-Time Variation of Physical Constants and Relativistic Corrections in Atoms, Phys Rev Lett., 1999, 82: 888-891

[34] Dzuba V A, Flambaum V V, and Webb J K, Calculations of the relativistic effects in many-electron atoms and space-time variation of fundamental constants. Phys Rev A. 1999, 59: 230-237

[35] Murphy M T, Webb J K, and Flambaum V V, Further evidence for a variable fine-structure constant from Keck/HIRES QSO absorption spectra. Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 2003, 345, 609-638

[36] Murphy M T, Flambaum V V, and Webb J K, in Astrophysics, Clocks and Fundamental Constants, Lecture Notes in Physics (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2004), Vol. 648: pp. 131-150.

[37] King J A, et al. Spatial variation in the fine-structure constant – new results from VLT/UVES. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 2012, 422: 3370-3414

[38] Morad S, Aboualizadeh E, Hydrogen atom and its energy level shifts in de Sitter universe. Gen Relativ Gravit. 2010, 42: 435-442

Special Relativity Related to the Einstein's Cosmological Constant

——A review to De Sitter/Anti De Sitter Invariant Special Relativity

Mu-Lin Yan

Interdisciplinary Center for Theoretical Study,

Department of Modern Physics,

University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230026, China

Common Special Relativity (SR) is invariant under Poincaré transformations and its basic space-time metric is Minkowski metric which satisfies the vacuum Einstein equation without cosmologic constant Λ. In this paper it is shown that when $\Lambda \neq 0$, Poincaré invariant SR becomes De Sitter/Anti De Sitter (dS/AdS) Invariant SR. Solving the vacuum Einstein equation with non-zero Λ and considering the inertial moving law for free particle (the first Newton law), it is found that the generic basic metric for SR with $\Lambda \neq 0$ is the Beltrami metric, which was originally suggested by Lu-Zou-Guo in 1974. In this present paper all Killing vectors for Beltrami metric are presented via solving the Killing equations, and that Beltrami space-time has maximum symmetries is shown. Through this way all conservative qualities are found, and dS/AdS invariant SR is formulated. The canonic formalism for dS/AdS SR mechanics has been derived. We find out that the corresponding dispersion relations of positive-version and negative-version Hamiltonian are not symmetric. Comparing with common SR this asymmetry property coming from $\Lambda \neq 0$ is very special. We conjecture that it may leat to reveal the reasons for understanding matter- antimatter asymmetric in the evolutions of the Universe. By using canonic quantization, we formulate dS/AdS SR Quantum Mechanics. The corresponding SR quantum wave equations are given. We briefly introduce and comment the experiments to detect the fine-structure constant (α) variations via observing the absorbtion spectrums of atoms (or ions) at $z \approx 1 \sim 3$ against quasar's lines. Such α-change experiment results are against the prediction of that α keeps unchange, which come from the Poincaé invariant SR. Considering that α-changes in dS/AdS invariant SR atomic physics have been confirmed in theory, such α-change experiment results could be thought as a support to dS/AdS invariant SR. The physics of dS/AdS-invariant SR is beyond the standard model of physics.

Key words: Einstein's cosmologic constant, De Sitter/Anti de Sitter invariant special relativity, Relativistical quantum mechanics, Fine-structure constant